

GAZDASÁGI MATEMATIKA 2. – 13. HÉT

KÉSZÍTETTE: DR. NAGY NOÉMI

1. SZÁLLÍTÁSI FELADAT

A szállítási feladat egy speciális lineáris programozási feladat, ezért szimplex módszerrel is megoldható lenne, azonban annak egy módosított változatát fogjuk használni.

A feladat során m darab raktárunk van (R_i) és n darab bolt (B_j). A raktárakban r_i egységnyi mennyiségű termék áll rendelkezésre, a boltokban pedig b_j egységnyi termékigény van. Amennyiben a két összeg nem egyezik meg, azaz $\sum r_i \neq \sum b_j$, fiktív raktárat vagy fiktív boltot kell létrehozni, melynek kapacitása vagy igénye a két összeg különbségével egyezik meg, valamint a szállítási költség itt természetesen 0.

(Ha valamelyik raktárból valamelyik boltba nem tudunk szállítani, ott hagyományosan egy M írandó, amivel azt fejezzük ki, hogy a kettő között végtelen nagy lenne a szállítási költség. Egy másik lehetőség, hogy a kettő között egy nagyságrendekkel nagyobb szállítási költséget írunk, mint a többi.)

Adottak továbbá a szállítás költségei, azaz hogy az i -edik raktárból a j -edik boltba mennyibe kerül (vagy milyen távolságra van, stb.) a szállítás: c_{ij} . A feladat során meg kell határoznunk azt a szállítási tervet, ahol az összköltség minimális. A feladat matematikai modellje a következő:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Az i -edik raktárból a j -edik boltba szállított mennyiségeket x_{ij} -vel jelöljük.

Természetesen felmerülhet olyan probléma is, ahol az összértéket maximalizálni szeretnénk. Erre is fogunk példát látni.

A feladat megoldásában nagy segítségünkre lesz a feladat duálisa: Az első m feltételhez vezessük be az u_i változókat, a maradék n feltételhez pedig a v_j változókat. Ezek előjelére vonatkozóan nincs megkötésünk, hiszen minden feltétel egyenlőség. A szállítási feladat duálisa tehát a következő:

$$\begin{aligned} u_i + v_j &\leq c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m r_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Nézzünk most két konkrét példát és érdekességképpen írjuk fel a feladatot lineáris programozási feladatként, valamint a feladat duálisát is:

1.1. Példa. Három borászat három üzletet lát el borral. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az egyes borászatokból az egyes üzletekbe mekkora a szállítási költség, valamint hogy hány egységnyi bor áll rendelkezésre (kapacitás), valamint hogy az üzleteknek mekkora mennyiségre van szükségük (igény):

	igény	120	90	50
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃
100	B ₁	50	10	20
80	B ₂	40	30	10
110	B ₃	5	80	70

Továbbá a harmadik borászat teljes kapacitással működik.

Megoldás. Mivel azt látjuk, hogy a borászatok kapacitása és az üzletek igénye nem egyezik meg ($100 + 80 + 110 = 290$, $120 + 90 + 50 = 260$), ezért $290 - 260 = 30$ kapacitással létrehozunk egy újabb, fiktív üzletet, melyben természetesen a szállítási költség 0 lesz, hiszen az ide szállított termékeket valójában nem mozgatjuk. A példa utolsó mondata azt jelenti, hogy a fiktív üzlet és a harmadik borászat között nem lesz szállítás, így oda szállítási költségként "M" kerül:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ *
100	B ₁	50	10	20	0
80	B ₂	40	30	10	0
110	B ₃	5	80	70	M

Most már felírhatjuk a feladatot lineáris programozási feladatként:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 80$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

$$50x_{11} + 10x_{12} + 20x_{13} + 0x_{14} + 40x_{21} + 30x_{22} + 10x_{23} + 0x_{24} + 5x_{31} + 80x_{32} + 70x_{33} + Mx_{34} \rightarrow \min$$

Az első három feltételhez az u_i , a második négyhez a v_j változókat bevezetve a feladat duálisa a következőképpen néz ki:

$$u_1 + v_1 \leq 50 \quad u_1 + v_2 \leq 10 \quad u_1 + v_3 \leq 20 \quad u_1 + v_4 \leq 0$$

$$u_2 + v_1 \leq 40 \quad u_2 + v_2 \leq 30 \quad u_2 + v_3 \leq 10 \quad u_2 + v_4 \leq 0$$

$$u_3 + v_1 \leq 5 \quad u_3 + v_2 \leq 80 \quad u_3 + v_3 \leq 70 \quad u_3 + v_4 \leq M$$

$$100u_1 + 80u_2 + 110u_3 + 120v_1 + 90v_2 + 50v_3 + 30v_4 \rightarrow \max$$

Ennek a feladat megoldása során még hasznát fogjuk venni.

Miután létrehoztuk fiktív üzletünket és beírtuk az M-t, ahová szükséges, a következő lépés az induló tábla meghatározása. Erre három módszert fogok megmutatni:

1.1.1. *Észak-nyugati sarok módszer*: Ennél a módszernél az észak-nyugati (bal-felső) sarokból indulunk és beírjuk a legnagyobb értéket, amit tudunk, azaz a rendelkezésre álló kapacitás és az üzlet igényének minimumát. Ez azt jelenti, hogy ennyivel csökken mind a két érték:

	igény	120	90	50	30		igény	20	90	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁	100				$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
80	B ₂						80	B ₂				
110	B ₃						110	B ₃				

A módszert addig folytatjuk, míg a felhasználható kapacitások és igények nullára nem redukálódnak:

	igény	20	90	50	30		igény	0	90	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	100	–	–	–	⇒	0	B ₁	100	–	–	–
80	B ₂	20					60	B ₂	20			
110	B ₃						110	B ₃	–			

		igény	0	90	50	30			igény	0	30	50	30
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	60	B ₂	20	60				0	B ₂	20	60	–	–
	110	B ₃	–					110	B ₃	–			

		igény	0	30	50	30			igény	0	0	50	30
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	0	B ₂	20	60	–	–		0	B ₂	20	60	–	–
	110	B ₃	–	30				80	B ₃	–	30		

		igény	0	0	50	30			igény	0	0	0	30
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	0	B ₂	20	60	–	–		0	B ₂	20	60	–	–
	80	B ₃	–	30	50			30	B ₃	–	30	50	

		igény	0	0	0	30			igény	0	0	0	0
	kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–	$\Rightarrow$	0	B ₁	100	–	–	–
	0	B ₂	20	60	–	–		0	B ₂	20	60	–	–
	30	B ₃	–	30	50	30		0	B ₃	–	30	50	30

Ez lesz az észak-nyugati sarok módszerrel kapott induló táblánk.

1.1.2. *Minimális költségek módszere.* Ennél a módszernél a szállítási költségekre is szükségünk lesz. A módszer lényege, hogy mindig a legkisebb költségűhöz írjuk be a lehető legnagyobb mennyiséget:

szállítási költségek:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁	50	10	20	0
80	B ₂	40	30	10	0
110	B ₃	5	80	70	M

⇒

	igény	120	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁	50	10	20	–
80	B ₂	40	30	10	–
110	B ₃	5	80	70	–

⇒

	igény	10	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁	50	10	20	–
80	B ₂	40	30	10	–
0	B ₃	–	–	–	–

⇒

	igény	10	20	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–
80	B ₂	40	30	10	–
0	B ₃	–	–	–	–

⇒

	igény	10	20	0	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–
30	B ₂	40	30	–	–
0	B ₃	–	–	–	–

⇒

	igény	10	0	0	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	–	–	–
10	B ₂	40	–	–	–
0	B ₃	–	–	–	–

⇒

induló tábla:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
100	B ₁				30
80	B ₂				
110	B ₃				

	igény	120	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁				30
80	B ₂				–
110	B ₃	110			–

	igény	10	90	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
70	B ₁		70		30
80	B ₂				–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	10	20	50	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	70	–	30
80	B ₂			50	–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	10	20	0	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	70	–	30
30	B ₂		20	50	–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	10	0	0	0
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B ₁	–	70	–	30
10	B ₂	10	20	50	–
0	B ₃	110	–	–	–

	igény	0	0	0	0			igény	0	0	0	0
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ [*]		kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ [*]
0	B ₁	–	–	–	–	⇒	0	B ₁	–	70	–	30
0	B ₂	–	–	–	–		0	B ₂	10	20	50	–
0	B ₃	–	–	–	–		0	B ₃	110	–	–	–

Tehát minimális költségek módszerével ez lesz az induló táblánk.

1.1.3. *Vogel-Korda módszer.* Ennél a módszernél minden egyes lépésben meghatározzuk minden sorban és oszlopban a két legkisebb szállítási költségű érték különbségét. Ahol ez az érték legnagyobb, oda fogjuk beírni a lehető legtöbb szállítást a kisebb értékhez:

szállítási költségek:

	igény	120	90	50	30	
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ [*]	
100	B ₁	50	10	20	0	10-0=10
80	B ₂	40	30	10	0	10-0=10
110	B ₃	5	80	70	M	70-5= 65
		40-5=35	30-10=20	20-10=10	0-0=0	

induló tábla:

	igény	120	90	50	30
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ [*]
100	B ₁				
80	B ₂				
110	B ₃	110			

szállítási költségek:

	igény	10	90	50	30	
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ [*]	
100	B ₁	50	10	20	0	10-0=10
80	B ₂	40	30	10	0	10-0=10
0	B ₃	–	–	–	–	–
		50-40=10	30-10= 20	20-10=10	0-0=0	

induló tábla:

	igény	10	90	50	30
kapacitás		Ü ₁	Ü ₂	Ü ₃	Ü ₄ [*]
100	B ₁	90			
80	B ₂				
0	B ₃	110	–	–	–

szállítási költségek:

	igény	10	0	50	30	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$	
10	B_1	50	–	20	0	$20-0=20$
80	B_2	40	–	10	0	$10-0=10$
0	B_3	–	–	–	–	–
		$50-40=10$	–	$20-10=10$	$0-0=0$	

induló tábla:

$\Rightarrow$

	igény	10	0	50	30
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
10	B_1		90		10
80	B_2		–		
0	B_3	110	–	–	–

szállítási költségek:

	igény	10	0	50	20	
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$	
0	B_1	–	–	–	–	–
80	B_2	40	–	10	0	$10-0=0$
0	B_3	–	–	–	–	–
		?	–	?	?	

induló tábla:

$\Rightarrow$

	igény	10	0	50	20
kapacitás		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
0	B_1	–	90	–	10
80	B_2	10	–	50	20
0	B_3	110	–	–	–

Az utolsó lépésben az oszlopok közül már túl sok választási lehetőségünk nincsen, ezért az üres helyekre beírjuk a fennmaradó kapacitásokat.

Általánosságban elmondható, hogy a Vogel-Korda módszer - bár némiképp bonyolultabb a többinél - a legjobb, hiszen általában ez már pár lépésen belül a minimális összköltségű eredményt adja.

A megoldás folytatása. A módszer ismertetéséhez szükségünk lesz a szállítási költségek táblázatára és egy induló táblára. Utóbbi legyen az észak-nyugati sarok módszerrel kapott induló tábla:

szállítási költségek:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	50	10	20	0
B_2	40	30	10	0
B_3	5	80	70	M

induló tábla:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	100	–	–	–
B_2	20	60	–	–
B_3	–	30	50	30

Induláskor a szállítási költség:

$$50 \cdot 100 + 40 \cdot 20 + 30 \cdot 60 + 80 \cdot 30 + 70 \cdot 50 + M \cdot 30 = 13500 + 30M$$

A szállítási feladat megoldásához mindkét táblára szükségünk lesz. Első körben a szállítási költségek táblával foglalkozunk: felhasználjuk, amit a duál feladat során felírtunk. Bevezetünk u és v

változókat, melyek összegének értéke azokon a helyeken egyezik meg a szállítási költségekkel, ahol az induló tábla szerint történik szállítás:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = \mathbf{50}$	10	20	0
u_2	$u_2 + v_1 = \mathbf{40}$	$u_2 + v_2 = \mathbf{30}$	10	0
u_3	5	$u_3 + v_2 = \mathbf{80}$	$u_3 + v_3 = \mathbf{70}$	$u_3 + v_4 = \mathbf{M}$

A következő lépésben $u_1 = 0$ választás mellett meghatározzuk az u -k és v -k értékét. Ahogy az alábbi táblázatban látjuk, a sorok és oszlopok elején lévő értékek összege éppen a kék színű számokkal egyezik meg.

	$v_1 = 50$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = M - 40$
$u_1 = 0$	$\mathbf{50}$	10	20	0
$u_2 = -10$	$\mathbf{40}$	$\mathbf{30}$	10	0
$u_3 = 40$	5	$\mathbf{80}$	$\mathbf{70}$	$\mathbf{M}$

A többi helyen kiszámoljuk a $c_{ij} - u_i - v_j$ értéket. Az algoritmus akkor ér véget, ha ezek között nem fog negatív szám megjelenni.

	$v_1 = 50$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = M - 40$
$u_1 = 0$	$\mathbf{50}$	$10 - 0 - 40 = \mathbf{-30}$	$20 - 0 - 30 = \mathbf{-10}$	$0 - 0 - (M - 40) = \mathbf{-M + 40}$
$u_2 = -10$	$\mathbf{40}$	$\mathbf{30}$	$10 - (-10) - 30 = \mathbf{-10}$	$0 - (-10) - (M - 40) = \mathbf{-M + 50}$
$u_3 = 40$	$5 - 40 - 50 = \mathbf{-85}$	$\mathbf{80}$	$\mathbf{70}$	$\mathbf{M}$

Ha ezen értékek között találunk negatív értéket, akkor javítható az optimális érték. Célszerű azt a szállítást választani, ahol ez a negatív érték a legkisebb (ezt meg is vastagítottuk). Így tehát az első borászat és a fiktív üzlet között történnie kell szállításnak. Így a szállítási táblában ide elsőként x -et írunk és elkezdődik a hurokmódszer:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	100	–	–	$\mathbf{x}$
B ₂	20	60	–	–
B ₃	–	30	50	30

A hurokmódszer lényege abban áll, hogy mivel valahová beírtunk az x értéket, ezzel az értékkel a sorában egy helyen x -szel csökkennie kell az adott értéknek, ami azt jelenti, hogy annak oszlopában egy helyen az érték x -szel növekedni fog, és így tovább. A cél, hogy ez "körbeérjen", tehát vissza az x -hez. Ezért hívjuk ezt hurokmódszernek.

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	$\mathbf{100 - x}$	–	–	$\mathbf{x}$
B ₂	$\mathbf{20 + x}$	$\mathbf{60 - x}$	–	–
B ₃	–	$\mathbf{30 + x}$	50	$\mathbf{30 - x}$

Az x értéke a legkisebb szám azok közül, ahol $-x$ látható, azaz $x = \min\{100, 60, 30\} = 30$. Így a következő szállítási táblánk:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70	–	–	30
B ₂	50	30	–	–
B ₃	–	60	50	–

Így tehát az újabb szállítási költség:

$$50 \cdot 70 + 0 \cdot 30 + 40 \cdot 50 + 30 \cdot 30 + 80 \cdot 60 + 70 \cdot 50 = 14700$$

Meg kell vizsgálnunk, hogy ez már az optimális érték-e, amit a szállítási költségek táblázatával tehetünk meg: bevezetjük az u és v értékeket, rögzítjük, hogy $u_1 = 0$ és ennek segítségével meghatározzuk a többi értéket, majd azokon a helyeken, ahol nem történt szállítás, kiszámoljuk a $c_{ij} - u_i + v_j$ értékeket és amennyiben találunk negatív értéket, javítható a szállítási költség és a hurokmódszer segítségével ezt megteesszük. A módszert addig folytatjuk, míg az új értékeknél sehol nem lesz negatív szám a szállítási költségeknél:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = \mathbf{50}$	10	20	$u_1 + v_4 = \mathbf{0}$
u_2	$u_2 + v_1 = \mathbf{40}$	$u_2 + v_2 = \mathbf{30}$	10	0
u_3	5	$u_3 + v_2 = \mathbf{80}$	$u_3 + v_3 = \mathbf{70}$	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	$\mathbf{50}$	$10 - 0 - 40 = \mathbf{-30}$	$20 - 0 - 30 = \mathbf{-10}$	$\mathbf{0}$
$u_2 = -10$	$\mathbf{40}$	$\mathbf{30}$	$10 - (-10) - 30 = \mathbf{-10}$	$0 - (-10) - 0 = 10$
$u_3 = 40$	$5 - 40 - 50 = \mathbf{-85}$	$\mathbf{80}$	$\mathbf{70}$	$M - 40 - 0 = M - 40$

Amint látható, ez még nem optimális, ezért a hurokmódszer segítségével meghatározzuk a következő szállítási táblát:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70	–	–	30	$\Rightarrow$	B ₁	70	–	–	30
B ₂	50	30	–	–		B ₂	50-x	30+x	–	–
B ₃	x	60	50	–		B ₃	x	60-x	50	–

Itt $x = \min\{50, 60\} = 50$, vagyis az újabb szállítási tábla:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	70	–	–	30
B ₂	–	80	–	–
B ₃	50	10	50	–

A következő lépésben kiszámoljuk a szállítás költségét:

$$70 \cdot 50 + 30 \cdot 0 + 80 \cdot 30 + 50 \cdot 5 + 10 \cdot 80 + 50 \cdot 70 = 10450$$

Vizsgáljuk meg, hogy ez már optimális-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = \mathbf{50}$	10	20	$u_1 + v_4 = \mathbf{0}$
u_2	40	$u_2 + v_2 = \mathbf{30}$	10	0
u_3	$u_3 + v_1 = \mathbf{5}$	$u_3 + v_2 = \mathbf{80}$	$u_3 + v_3 = \mathbf{70}$	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 125$	$v_3 = 115$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	$10 - 0 - 125 = \mathbf{-115}$	$20 - 0 - 115 = \mathbf{-95}$	0
$u_2 = -95$	$40 - (-95) - 50 = 85$	30	$10 - (-95) - 115 = \mathbf{-10}$	$0 - (-95) - 0 = 95$
$u_3 = -45$	5	80	70	$M - (-45) - 0 = M + 45$

Azt látjuk, hogy a táblázatban továbbra is szerepelnek negatív értékek, ezért a megfelelő helyre beírjuk x -et és a hurokmódszert alkalmazzuk:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	70-x	x	-	30
B_2	-	80	-	-
B_3	50+x	10-x	50	-

$$x = \min\{70, 10\} = 10 \implies$$

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	60	10	-	30
B_2	-	80	-	-
B_3	60	-	50	-

A szállítási költség ekkor:

$$60 \cdot 50 + 10 \cdot 10 + 30 \cdot 0 + 80 \cdot 30 + 60 \cdot 5 + 50 \cdot 70 = 10300$$

Vizsgáljuk meg, ez már optimális-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = \mathbf{50}$	$u_1 + v_2 = \mathbf{10}$	20	$u_1 + v_4 = \mathbf{0}$
u_2	40	$u_2 + v_2 = \mathbf{30}$	10	0
u_3	$u_3 + v_1 = \mathbf{5}$	80	$u_3 + v_3 = \mathbf{70}$	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 10$	$v_3 = 115$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	10	$20 - 0 - 115 = \mathbf{-95}$	0
$u_2 = 20$	$40 - 20 - 50 = \mathbf{-30}$	30	$10 - 20 - 115 = \mathbf{-125}$	$0 - 20 - 0 = \mathbf{-20}$
$u_3 = -45$	5	$80 - (-45) - 10 = 135$	70	$M - (-45) - 0 = M + 45$

Ismét találtunk negatív értékeket, ezért tovább számolunk a hurokmódszerrel:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	60-x	10+x	-	30
B_2	-	80-x	x	-
B_3	60+x	-	50-x	-

$$x = \min\{60, 80, 50\} = 50 \implies$$

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B_1	10	60	-	30
B_2	-	30	50	-
B_3	110	-	-	-

Itt a szállítási költség:

$$10 \cdot 50 + 60 \cdot 10 + 30 \cdot 0 + 30 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 110 \cdot 5 = 3050$$

Nézzük meg, lehet-e ezen a szállítási költségen javítani:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	$u_1 + v_1 = \mathbf{50}$	$u_1 + v_2 = \mathbf{10}$	20	$u_1 + v_4 = \mathbf{0}$
u_2	40	$u_2 + v_2 = \mathbf{30}$	$u_2 + v_3 = \mathbf{10}$	0
u_3	$u_3 + v_1 = \mathbf{5}$	80	70	M

	$v_1 = 50$	$v_2 = 10$	$v_3 = -10$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50	10	$20 - 0 - (-10) = 30$	0
$u_2 = 20$	$40 - 50 - 20 = \mathbf{-30}$	30	10	$0 - 20 - 0 = \mathbf{-20}$
$u_3 = -45$	5	$80 - (-45) - 10 = 115$	$70 - (-45) - (-10) = 125$	$M - (-45) - 0 = M + 45$

Lehet javítani a szállítási költségen, ezért hurokmódszerrel folytatjuk az algoritmust:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	10-x	60+x	-	30	$x = \min\{10, 30\} = 10 \implies$	B ₁	-	70	-	30
B ₂	x	30-x	50	-		B ₂	10	20	50	-
B ₃	110	-	-	-		B ₃	110	-	-	-

Ellenőrizzük, hogy ez már optimális-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	50	$u_1 + v_2 = \mathbf{10}$	20	$u_1 + v_4 = \mathbf{0}$
u_2	$u_2 + v_1 = \mathbf{40}$	$u_2 + v_2 = \mathbf{30}$	$u_2 + v_3 = \mathbf{10}$	0
u_3	$u_3 + v_1 = \mathbf{5}$	80	70	M

	$v_1 = 20$	$v_2 = 10$	$v_3 = -10$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	$50 - 0 - 20 = 30$	10	$20 - 0 - (-10) = 30$	0
$u_2 = 20$	40	30	10	$0 - 20 - 0 = \mathbf{-20}$
$u_3 = -15$	5	$80 - (-15) - 10 = 85$	$70 - (-15) - (-10) = 95$	$M - (-15) - 0 = M + 15$

Sajnos még ez sem az optimális szállítás, ezért használjuk a hurokmódszert a szállítási táblában:

	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$			$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	—	70+x	—	30-x	$x = \min\{30, 20\} = 20 \implies$	B ₁	—	90	—	10
B ₂	10	20-x	50	x		B ₂	10	—	50	20
B ₃	110	—	—	—		B ₃	110	—	—	—

Ekkor a szállítási költség:

$$90 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 40 + 50 \cdot 10 + 20 \cdot 0 + 110 \cdot 5 = 2350$$

Vizsgáljuk meg, hogy ez már az optimális szállítás-e:

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	50	$u_1 + v_2 = \mathbf{10}$	20	$u_1 + v_4 = \mathbf{0}$
u_2	$u_2 + v_1 = \mathbf{40}$	30	$u_2 + v_3 = \mathbf{10}$	$u_2 + v_4 = \mathbf{0}$
u_3	$u_3 + v_1 = \mathbf{5}$	80	70	M

	$v_1 = 40$	$v_2 = 10$	$v_3 = 10$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	50-0-40=10	10	20-0-10=10	0
$u_2 = 0$	40	30-0-10=20	10	0
$u_3 = -35$	5	80-(-35)-10=105	70-(-35)-10=95	M-(-35)-0=M+35

Tehát összefoglalva:

szállítási költségek:					szállítás:				
	$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$		$\ddot{U}_1$	$\ddot{U}_2$	$\ddot{U}_3$	$\ddot{U}_4^*$
B ₁	50	10	20	0	B ₁	–	90	–	10
B ₂	40	30	10	0	B ₂	10	–	50	20
B ₃	5	80	70	M	B ₃	110	–	–	–

A szállítási összköltség: 2350.

1.2. Megjegyzés. Ha a kapott eredményt és a Vogel-Korda módszerrel meghatározott induló táblát összevetjük, azt látjuk, hogy a kettő megegyezik. Ami azt jelenti, hogy a Vogel-Korda módszer valóban jó induló táblát ad.

1.3. Példa. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy egy szőlősgazda melyik szőlőfajtából mennyit kínál eladásra és hogy az egyes vevők mennyit fizetnének azok kilójáért. Mivel a vevők étkezési céllal veszik a szőlőt, ezért pusztán azt határozzák meg, hogy mennyi szőlőre van szükségük. Határozzuk meg, hogy a szőlősgazda melyik vevőnek melyik fajtából mennyit adjon ahhoz, hogy a bevétele maximális legyen!

	rendelkezésre áll	100 kg	150 kg	250 kg
igény		csabagyöngye	saszla	szőlőskertek királynője
200 kg	Ármin	100 Ft	120 Ft	150 Ft
120 kg	Árpád	80 Ft	130 Ft	120 Ft
180 kg	Áron	110 Ft	110 Ft	130 Ft

Megoldás. Az első feladatunk, hogy ellenőrizzük, hogy az igény és a rendelkezésre álló mennyiség összegei megegyeznek-e, egyébként fiktív vevőt vagy fiktív fajtát kellene bevezetnünk, természetesen 0 Ft-os áron. Itt most az igények összege $200+120+180=500$ kg és a rendelkezésre álló szőlőmennyiség $100+150+250=500$ kg, tehát új sor vagy oszlop bevezetésére nincs szükség.

Mivel az eredeti célunk, hogy az összbevételt maximalizáljuk, a feladatot át kell írunk minimum feladatra, hiszen arra már ismerjük a megoldási módszert. Ehhez megkeressük a legnagyobb szállítási költséget (jelen esetben a kialakított vételárat) és minden egyes árat kivonunk belőle:

	rendelkezésre áll	100 kg	150 kg	250 kg
igény		csabagyöngye	saszla	szőlőskertek királynője
200 kg	Ármin	150-100=50 Ft	150-120=30 Ft	150-150=0 Ft
120 kg	Árpád	150-80=70 Ft	150-130=20 Ft	150-120=30 Ft
180 kg	Áron	150-110=40 Ft	150-110=40 Ft	150-130=20 Ft

Innentől kezdve ezzel a táblázattal foglalkozunk és ugyanúgy járunk el, mint az előző példában.

A feladat megoldásához szükségünk lesz egy induló táblára, amit a Vogel-Korda módszerrel határozzunk meg. Hiszen mint láttuk, ez a legtöbb esetben már optimális vagy közel optimális megoldást ad.

	kapacitás	100	150	250	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
200	Á ₁	50	30	0	30-0= 30
120	Á ₂	70	20	30	30-20=10
180	Á ₃	40	40	20	40-20=20
		50-40=10	30-20=10	20-0=20	

		kapacitás	100	150	250
	igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
⇒	200	Á ₁			200
	120	Á ₂			
	180	Á ₃			

	kapacitás	100	150	50	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
0	Á ₁	–	–	–	–
120	Á ₂	70	20	30	30-20=10
180	Á ₃	40	40	20	40-20=20
		70-40= 30	40-20=20	30-20=10	

		kapacitás	100	150	50
	igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
⇒	0	Á ₁	–	–	200
	120	Á ₂			
	180	Á ₃	100		

	kapacitás	0	150	50	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
0	Á ₁	–	–	–	–
120	Á ₂	–	20	30	30-20=10
80	Á ₃	–	40	20	40-20= 20
		–	40-20=20	30-20=10	

$$\Rightarrow$$

	kapacitás	0	150	50
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
0	Á ₁	–	–	200
120	Á ₂	–		
80	Á ₃	100		50

	kapacitás	0	150	0	
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃	
0	Á ₁	–	–	–	–
120	Á ₂	–	20	–	?
30	Á ₃	–	40	–	?
		–	40-20=20	–	

$$\Rightarrow$$

	kapacitás	0	150	0
igény		Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
0	Á ₁	–	–	200
120	Á ₂	–	120	–
30	Á ₃	100	30	50

Tehát a minimalizálásra átvitt feladat szállítási költségek táblája és az induló tábla a következő:

szállítási költségek:

	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
Á ₁	50	30	0
Á ₂	70	20	30
Á ₃	40	40	20

induló tábla:

	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
Á ₁	–	–	200
Á ₂	–	120	–
Á ₃	100	30	50

Vizsgáljuk meg, hogy ez az optimális eredményt adja-e:

	v_1	v_2	v_3
u_1	50	30	$u_1 + v_3 = 0$
u_2	70	$u_2 + v_2 = 20$	30
u_3	$u_3 + v_1 = 40$	$u_3 + v_2 = 40$	$u_3 + v_3 = 20$

	$v_1 = 20$	$v_2 = 20$	$v_3 = 0$
$u_1 = 0$	$50 - 0 - 20 = 30$	$30 - 0 - 20 = 10$	0
$u_2 = 0$	$70 - 0 - 20 = 50$	20	$30 - 0 - 0 = 30$
$u_3 = 20$	40	40	20

Mivel a $c_{ij} - u_i - v_j$ értékek mind pozitívak, ezért az induló tábla egyúttal az optimális is.

Tehát a feladat megoldása a következő:

vételárak:

	rendelkezésre áll	100 kg	150 kg	250 kg
igény		csabagyöngye	saszla	szőlőskertek
200 kg	Ármin	100 Ft	120 Ft	150 Ft
120 kg	Árpád	80 Ft	130 Ft	120 Ft
180 kg	Áron	110 Ft	110 Ft	130 Ft

szállítások táblája:

	Sz ₁	Sz ₂	Sz ₃
Á ₁	–	–	200
Á ₂	–	120	–
Á ₃	100	30	50

A szőlősgazda bevétele:

$$200 \cdot 150 + 120 \cdot 130 + 100 \cdot 110 + 30 \cdot 110 + 50 \cdot 130 = 66400$$

Ezt a bevételt a szőlősgazda úgy érte el, hogy Árminnak szőlőskertek királynőjéből 200 kg-ot adott el, Árpádnak 120 kg sasza szőlőt és Áronnak 100 kg csabagyöngyét, 30 kg saszlát és 50 kg szőlőskertek királynőjét.

1.4. Megjegyzés. A feladat megoldását nagyban módosítaná, hogyha például Ármin nem szeretné a szőlőskertek királynője fajtát és nem is vásárolna belőle. Ebben az esetben amikor a feladatot minimumfeladattá alakítjuk, a táblázat megfelelő helyére M-et kellene írunk.

Amint sejthető, ebben az esetben teljesen más megoldásra vezetne a feladat.

1.5. Megjegyzés. Amennyiben a $c_{ij} - u_i - v_j$ értékek között 0 szerepelne, az azt jelenti, hogy több optimális megoldás is létezik. Ha ide x értéket szállítunk, akkor a hurokmódszerrel meghatározhatjuk, hogy x milyen értékek között mozoghat és hogy ekkor a többi szállítás hogyan alakul.

2. HOZZÁRENDELÉSI FELADAT

A hozzárendelési feladat a szállítási feladat egy speciális változata. Röviden a feladat leírása a következő: Van n feladat és ugyanennyi dolgozó. Minden feladatot el tud végezni minden dolgozó, azonban nem ugyanolyan költséggel teszik azt. Általánosan az i -edik dolgozó a j -edik feladat elvégzését c_{ij} összegért csinálja meg. A feladat megoldása során minden dolgozónak munkát kell adnunk és minden feladatot el kell végeztetnünk úgy, hogy összességében a lehető legkisebb költséggel végezzék el a feladatot.

Az így leírt feladat matematikai modellje a következő:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad (i, j = 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Itt az $x_{ij} = 0$, ha az i -edik dolgozó nem a j -edik munkát kapja és $x_{ij} = 1$, ha igen.

Tehát a célunk, hogy egy $n \times n$ méretű költségmátrixból n darab számot válasszuk úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy választott elem legyen, melyek összege a lehető legkisebb.

2.1. Megjegyzés. A hozzárendelési feladat, mint a bevezetésben is szerepelt, a szállítási feladat speciális esete, hiszen úgy is tekinthetünk rá, mintha a kapacitások és igények mennyisége 1 lenne. Azonban az ilyen típusú (hozzárendelési) feladatok megoldására a speciális voltuk miatt más, egyszerűbb módszert fogunk használni.

A módszert az alábbi példán keresztül mutatjuk be:

2.2. Példa. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy öt különböző feladat elvégzésére öt alkalmazott mennyi idő alatt képes. Melyik dolgozó melyik feladatot végezze el ahhoz, hogy összességében a leggyorsabban el legyen végezve minden munka?

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	13	13	21	6	22
D2	12	13	15	4	18
D3	20	20	20	10	22
D4	26	26	24	12	27
D5	9	7	8	3	9

Megoldás. A feladat megoldásánál első lépésben sor- és oszlopredukcióra van szükség. Ez azt jelenti, hogy minden sorból, majd minden oszlopból ki kell vonnunk a legkisebb értéket. Így egy olyan táblázathoz jutunk, ahol minden sorban és minden oszlopban legalább 1-1 darab 0 érték fog szerepelni:

	F1	F2	F3	F4	F5			F1	F2	F3	F4	F5	
D1	13	13	21	6	22	-6	⇒	D1	7	7	15	0	16
D2	12	13	15	4	18	-4		D2	8	9	11	0	14
D3	20	20	20	10	22	-10		D3	10	10	10	0	12
D4	26	26	24	12	27	-12		D4	14	14	12	0	15
D5	9	7	8	3	9	-3		D5	6	4	5	0	6
									-6	-4	-5	-6	
	F1	F2	F3	F4	F5								
D1	1	3	10	0	10								
D2	2	5	6	0	8								
D3	4	6	5	0	6								
D4	8	10	7	0	9								
D5	0	0	0	0	0								

Amint látjuk, itt már minden sorban és minden oszlopban találunk nullákat. A feladatunk, hogy ebből minél több nullát be tudjunk jelölni. Ezeket függetleneknek nevezzük. Általában táblánál ezeket a nullákat be szoktam karikázni, itt pirossal jelöljük. A kiválasztás módjára javasolnám, hogy olyan sorokból vagy oszlopokból válasszunk nullát, ahol csak az az egyetlen nulla szerepel. Innentől kezdve annak oszlopából és sorából már nem választhatunk ki több nullát, hiszen nem lennének függetlenek.

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	1	3	10	0	10
D2	2	5	6	0	8
D3	4	6	5	0	6
D4	8	10	7	0	9
D5	0	0	0	0	0

Amint látjuk, többféleképpen is kiválaszthattuk volna ezt a két nullát, de több független nulla nincs a táblázatban, hiszen vagy a sorban vagy az oszlopában már választottunk ki nullát.

Tehát a független nullák száma most nulla. A folytatásban az összes táblázatban szereplő nullát le kellene fednünk vonalakkal. A táblán egyszerűen áthúznám a kiválasztott sort vagy oszlopot, itt szürkére színezem a választottakat.

A nullák lefedésénél elegendő annyi vonal, ahány független nulla szerepelt a táblázatban!!!

Ezért azt javaslom, hogy a független nullák kiválasztásával ellentétes módon azokat a sorokat vagy oszlopokat érdemes elsőként kiválasztani, amelyben sok nulla szerepel. Itt ez a negyedik oszlopban és az utolsó sorban van.

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	1	3	10	0	10
D2	2	5	6	0	8
D3	4	6	5	0	6
D4	8	10	7	0	9
D5	0	0	0	0	0

A megoldás következő lépése, hogy bevezetünk egy x értéket, mely az át nem húzott értékek közül a legkisebb. Ez most $x = 1$.

Ennek segítségével egy új táblázatot írunk fel a következőképpen:

- az át nem húzott (fehéren maradt) értékekből kivonjuk x -et
- az egyszer áthúzott értékek (világosszürke cellákban) változatlanok maradnak
- a kétszer áthúzott értékekhez (sötétszürke cellákban) hozzáadjuk x -et:

	F1	F2	F3	F4	F5			F1	F2	F3	F4	F5
D1	1-1	3-1	10-1	0	10-1	⇒	D1	0	2	9	0	9
D2	2-1	5-1	6-1	0	8-1		D2	1	4	5	0	7
D3	4-1	6-1	5-1	0	6-1		D3	3	5	4	0	5
D4	8-1	10-1	7-1	0	9-1		D4	7	9	6	0	8
D5	0	0	0	0+1	0		D5	0	0	0	1	0

Az így kapott táblázatban ismét független nullákat keresünk

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	0	2	9	0	9
D2	1	4	5	0	7
D3	3	5	4	0	5
D4	7	9	6	0	8
D5	0	0	0	1	0

A táblázatban három független nullát tudtunk megjelölni, így három vonallal le tudjuk fedni az összes táblázatbeli nullát:

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	0	2	9	0	9
D2	1	4	5	0	7
D3	3	5	4	0	5
D4	7	9	6	0	8
D5	0	0	0	1	0

$x = 2$, melyet a megfelelő elemekből (fehér) kivonunk, illetve a megfelelő elemekhez (sötétszürke) hozzáadunk.

Az algoritmust addig folytatjuk, amíg minden sorban és minden oszlopban meg nincs jelölve pirossal (bekarikázva) egy-egy nulla érték. A következő táblázatokban a független nullák mellett már a nullákat lefedő "vonalak" is ábrázoltuk.

	F1	F2	F3	F4	F5			F1	F2	F3	F4	F5
D1	0	0	7	0	7	$x = 1$ $\Rightarrow$	D1	0	0	7	1	7
D2	1	2	3	0	5		D2	0	1	2	0	4
D3	3	3	2	0	3		D3	2	2	1	0	2
D4	7	7	4	0	6		D4	6	6	3	0	5
D5	2	0	0	3	0		D5	2	0	0	4	0

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	1	0	7	2	7
D2	0	0	1	0	3
D3	2	1	0	0	1
D4	6	5	2	0	4
D5	3	0	0	5	0

Amint látjuk, az utolsó táblázatban már minden sorban és minden oszlopban van jelölt nulla (amik függetlenek is). Ez azt jelenti, hogy optimális megoldáshoz jutottunk, így látjuk, hogy például az első feladatot a második dolgozó, a második feladatot az első dolgozó fogja kapni, stb.

A feladatok elvégzéséhez szükséges idő pedig az eredeti táblázatból olvasható le:

	F1	F2	F3	F4	F5
D1	13	13	21	6	22
D2	12	13	15	4	18
D3	20	20	20	10	22
D4	26	26	24	12	27
D5	9	7	8	3	9

A megoldás tehát: $13 + 12 + 20 + 12 + 9 = 66$.

A következő példában megnézzük, hogyan kezelhető, ha nem az összegek minimumát, hanem maximumát keresi a feladat, esetleg ha több feladat van, mint dolgozó vagy fordítva, valamint ha esetleg valamelyik dolgozó valamelyik feladatot nem tudja elvégezni:

2.3. Példa. Egy iskolából nyitótáncára 6 lány és 4 fiú jelentkezett. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy melyik lány melyik fiúval milyen szívesen táncolna egy 0-10 skálán.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	6	5	8	10	9	5
F2	6	4	7	8	6	5
F3	5	5	6	8	6	3
F4	7	7	6	9	5	4

A feladatunk, hogy alkossuk meg a 4 fiú-lány párt úgy, hogy a lányok összességében minél boldogabban legyenek és a negyedik lány mindenképpen kapjon maga mellé párt.

Megoldás. A legszembetűnőbb probléma, és egyben elsőként megoldandó, hogy a lányok és fiúk száma megegyezzen. Ez úgy érhető el, hogy két fiktív fiúval bővítjük a táblázatot. Természetesen egyik lány sem szeretne "velük" táncolni, így ezekbe a sorokba nullák kerülnek:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	6	5	8	10	9	5
F2	6	4	7	8	6	5
F3	5	5	6	8	6	3
F4	7	7	6	9	5	4
F5*	0	0	0	0	0	0
F6*	0	0	0	0	0	0

A feladat maximális összeget keres, így a következő teendők a feladatot minimumkereső feladattá átalakítani. Erre, a szállítási feladathoz hasonlóan úgy kerül sor, hogy megkeressük a táblázat legnagyobb értékét (10) és a táblázat minden egyes elemét kivonjuk belőle:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	4	5	2	0	1	5
F2	4	6	3	2	4	5
F3	5	5	4	2	4	7
F4	3	3	4	1	5	6
F5*	10	10	10	10	10	10
F6*	10	10	10	10	10	10

A következő lépésben felhasználjuk, hogy a negyedik lánynak mindenképpen táncolnia kell, így a fiktív fiúk sorában a negyedik lány oszlopába bevezetünk egy M értéket. Ezt a szállítási feladat egyik példájában is alkalmaztuk.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	4	5	2	0	1	5
F2	4	6	3	2	4	5
F3	5	5	4	2	4	7
F4	3	3	4	1	5	6
F5*	10	10	10	M	10	10
F6*	10	10	10	M	10	10

A sor- és oszlopredukció (a sorrend mindegy) után már minden sorban és minden oszlopban fog szerepelni nulla.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6				L1	L2	L3	L4	L5	L6	
F1	4	5	2	0	1	5				F1	4	5	2	0	1	5
F2	4	6	3	2	4	5	−2			F2	2	4	1	0	2	3
F3	5	5	4	2	4	7	−2	⇒		F3	3	3	2	0	2	5
F4	3	3	4	1	5	6	−1			F4	2	2	3	0	4	5
F5*	10	10	10	M	10	10	−10			F5*	0	0	0	M	0	0
F6*	10	10	10	M	10	10	−10			F6*	0	0	0	M	0	0

Miután minden sorban és minden oszlopban találunk nullákat, a független nullák keresését és a nullák lefedését, új táblázat meghatározását ismételjük, míg minden sorban és minden oszlopban be nem tudunk független nullákat jelölni. Ez fogja megadni, hogy kik lesznek a párok.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6				L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	4	5	2	0	1	5	⇒	F1	4	5	2	0	1	5	
F2	2	4	1	0	2	3		F2	2	4	1	0	2	3	
F3	3	3	2	0	2	5		F3	3	3	2	0	2	5	
F4	2	2	3	0	4	5		F4	2	2	3	0	4	5	
F5*	0	0	0	M	0	0		F5*	0	0	0	M	0	0	
F6*	0	0	0	M	0	0		F6*	0	0	0	M	0	0	

		L1	L2	L3	L4	L5	L6			L1	L2	L3	L4	L5	L6
$x = 1$ $\Rightarrow$	F1	3	4	1	0	0	4	$\Rightarrow$	F1	3	4	1	0	0	4
	F2	1	3	0	0	1	2		F2	1	3	0	0	1	2
	F3	2	2	1	0	1	4		F3	2	2	1	0	1	4
	F4	1	1	2	0	3	4		F4	1	1	2	0	3	4
	F5*	0	0	0	M	0	0		F5*	0	0	0	M	0	0
	F6*	0	0	0	M	0	0		F6*	0	0	0	M	0	0

		L1	L2	L3	L4	L5	L6
$x = 1$ $\Rightarrow$	F1	3	4	1	1	0	4
	F2	1	3	0	1	1	2
	F3	1	1	0	0	0	3
	F4	0	0	1	0	2	3
	F5*	0	0	0	M	0	0
	F6*	0	0	0	M	0	0

Amint látjuk, itt már minden sorban és oszlopban pontosan egy darab nulla van jelölve, így ez már optimális. Ha ezeket a párokat állítjuk össze, akkor tudunk leginkább a lányok kedvére tenni.

A táblázatban azt is látjuk, hogy mindegy lenne, hogy a negyedik fiút az első vagy a második lány kapja párnak. Többféleképpen is ki tudtuk volna választani a független nullákat. Ez mindössze annyit jelent, hogy az optimális értéket több párosításból is visszakapnánk.

Nézzük meg, hogy ez a párosítás mit is jelent:

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
F1	6	5	8	10	9	5
F2	6	4	7	8	6	5
F3	5	5	6	8	6	3
F4	7	7	6	9	5	4

A fenti táblázat alapján valójában mindegy, hogy az első vagy a második lány táncol a negyedik fiúval, hiszen mindketten 7-et jelöltek meg a skálán.

Az összérték: $9 + 7 + 8 + 7 = 31$